

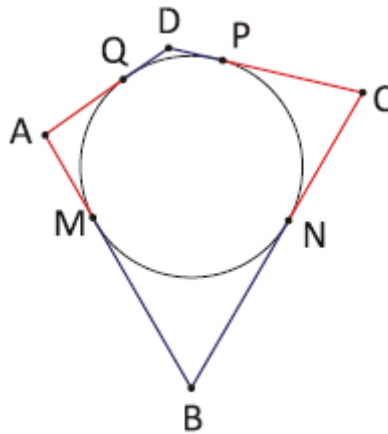
## Тангентни и тетивни четвороугао

Дефиниција: Четвороугао који има уписани круг називамо **тангентни четвороугао**.

Теорема: Четвороугао је тангентни акко су му зборови наспрамних страница једнаки.

Доказ: (Само у једном смеру): Нека су  $M, N, P, Q$  додирне тачке круга и четвороугла. Уочити једнакост тангентних дужи.

$$AB + CD = AM + MB + DP + PC = AQ + BN + QD + CN = AQ + QD + BN + CN = AD + BC$$

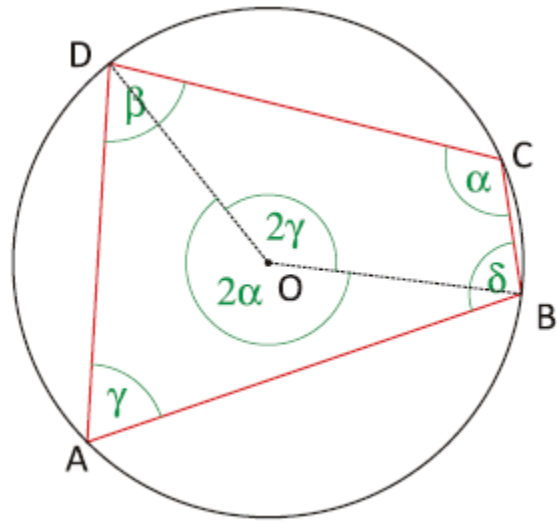


Дефиниција: Четвороугао који има описани круг називамо **тетивни четвороугао**.

Теорема: Четвороугао је тетивни акко су му зборови наспрамних углова једнаки.

Доказ: Уочити централне и периферијске углове.

$$2\alpha + 2\gamma = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ .$$



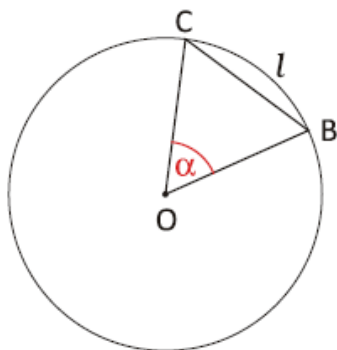
## Примена подударности на круг – централни и периферијски угао

**Централни угао** је угао са теменом у центру круга ( $\alpha$ ).

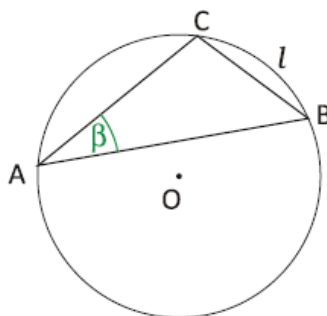
Дуж  $BC$  чије су крајње тачке на кружности назива се **тетива**.

$l$  је **кружни лук** (један од два лука који одређују ове тачке).

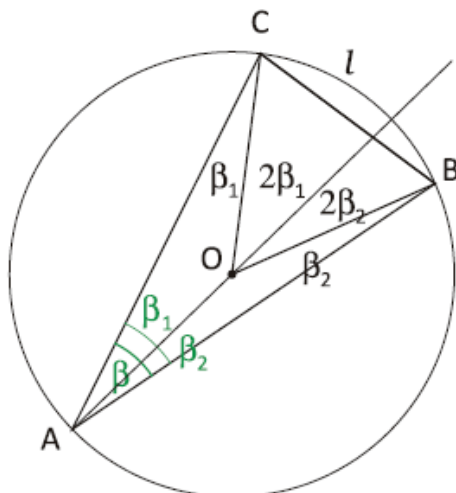
Теорема: Централни углови над једнаким тетивама су једнаки.



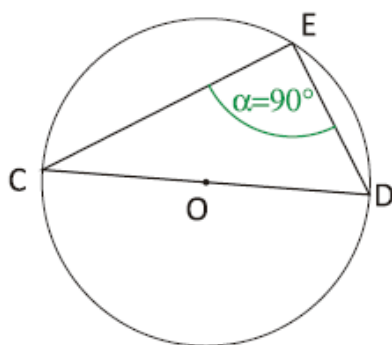
**Периферијски угао** је угао чије је теме на кружности (периферији круга), а чији краци секу кружницу (имају са њом још једну заједничку тачку осим темена).



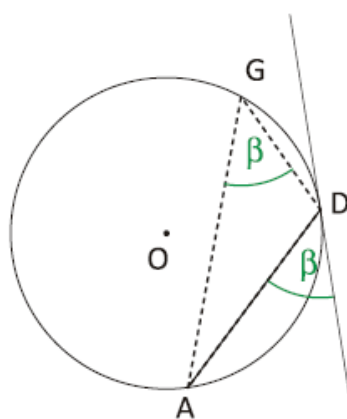
**Теорема:** Централни угао је два пута већи од централног угла над истим луком.



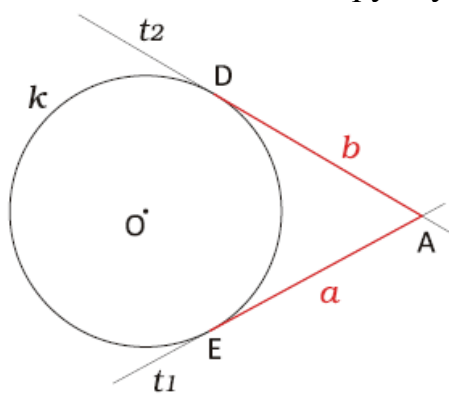
**Теорема (Талесова):** Периферијски угао над пречником је прав.



**Тангентни угао** једнак је периферијском углу над истим луком.



**Теорема:** Тангентне дужи из дате тачке на дати круг су једнаке.



## Конструкције геометријских места тачака

(скуп тачака подједнако удаљених од дате тачке, од две дате тачке, од дате праве,..)

1. Конструисати геометријско место тачака које се налазе на датом растојању  $a$  од дате тачке  $A$ .

Резултат: Кружница са центром у  $A$  и полупречником  $a$ .  $\kappa(A, a)$

2. Конструисати геометријско место тачака које су подједнако удаљене од две дате тачке  $A$  и  $B$ .

Резултат: Симетрала дужи  $AB$ .

3. Конструисати геометријско место тачака које се налазе на датом растојању  $d$  од дате праве  $p$ .

Резултат: Права паралелна прави  $p$ , на растојању  $d$  од ње.

4. Конструисати геометријско место тачака које су подједнако удаљене од две дате праве (које се секу).

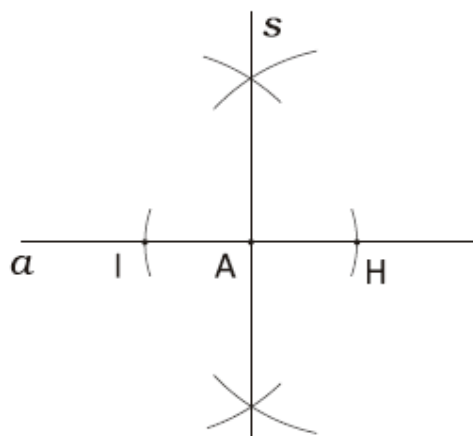
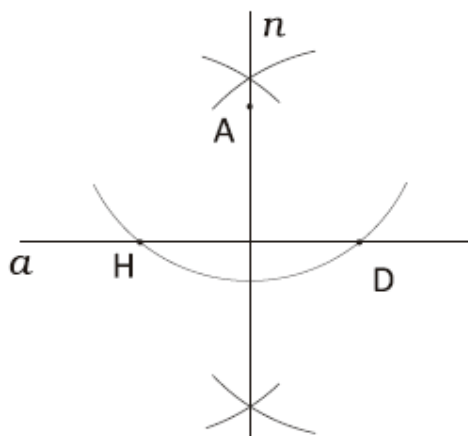
Резултат: Симетрале углова које чине дате праве.

5. Конструисати нормалу на дату праву из тачке

а) ван праве

б) на прави

Резултат:



## Конструкције троуглова

За **основне конструкције** сматраћемо: Преношење дужи, преношење угла, конструкције симетрале дужи и угла, конструкција паралелне праве датој прави кроз дату тачку, конструкција нормале на дату праву, дељење дужи у датој размери. За основне конструкције сматраћемо и четири основне конструкције троуглова: ако су му дате странице (ССС), ако су му дате две странице и угао захваћен њима (СУС), ако су му дате страница и углови налегли на њу (УСУ) и ако су му дате две странице и угао наспрам једне од њих (ССУ).

Конструктивни задатак има четири фазе:

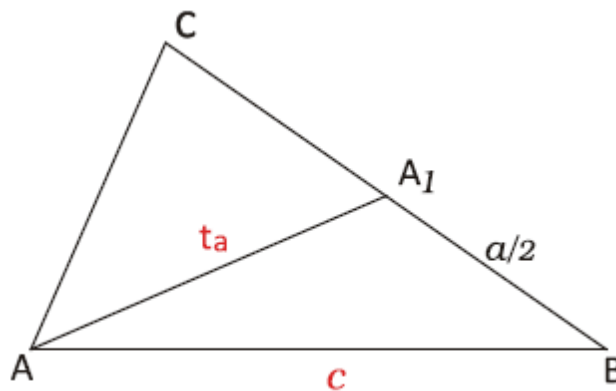
**Анализа:** На основу познатих особина тражимо начин за решавање задатка.

**Конструкција:** Конструисање на основу анализе.

**Доказ:** Доказивање да конструисана фигура задовољава услове задатка.

**Дискусија:** Испитивање постојања и броја решења.

**Задатак 1:** Конструисати троугао ако су задати следећи елементи:  $a, c, t_a$



**Анализа:** Троугао  $ABA_1$  може се конструисати (ССС). Тачка  $A_1$  је средиште странице  $BC$ , па се теме  $C$  може конструисати на основу тога што је  $B-A_1-C$ ,  $BA_1 = A_1C$

## Опис конструкције:

$$AB = c$$

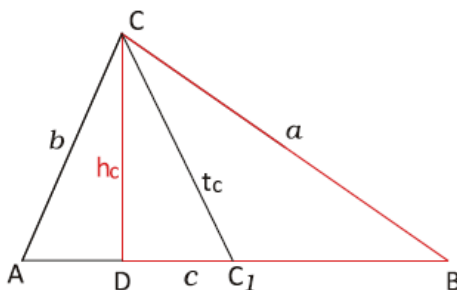
$$k_1(A, t_a) \cap k_2\left(B, \frac{a}{2}\right) = \{A_1\}$$

$$k\left(A_1, \frac{a}{2}\right) \cap p(B, A_1) = \{C\}$$

**Доказ:** Страница  $AB=c$  по конструкцији. Тачка  $A_1$  је средиште странице  $BC$  ( $BA_1 = A_1C$ ), па је  $ta$  тежишна дуж.  $BC=a/2+a/2=a$ .

**Дискусија:** За  $\left|t_a - \frac{a}{2}\right| < c < t_a + \frac{a}{2}$  задатак има јединствено решење

**Задатак 2:** Конструисати троугао ако су задати следећи елементи:  $\beta, h_c, t_c$



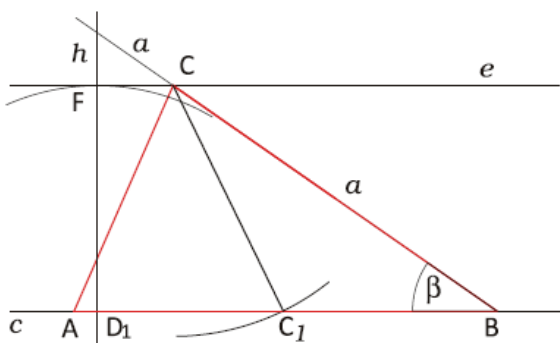
**Анализа:** Троугао  $BDC$  се може конструисати (УСУ). Након тога се може конструисати и тачка  $C_1$ , пошто је  $CC_1=t_c$ . Теме  $A$  је симетрична тачки  $B$  у односу на тачку  $C_1$ .

**Опис конструкције:** Конструисамо угао код темена  $B$   $\angle C_1Ba = \beta$ . У произвољној тачки полуправе  $Bc$  конструисамо висину.

$$D_1 \in Bc$$

$$D_1 \in h \perp Bc$$

$$k(D_1, h_c) \cap h = \{F\}$$



Теме  $C$  се налази на правој паралелној са  $Bc$  на растојању једнаком висини

$$F \in e \parallel Bc$$

$$e \cap Bc = \{C\}$$

Средиште странице  $AB$  налази се на кружници са центром у тачки  $C$  и полупречником једнаком тежишној дужи. Можемо уочити постојање два решења.

$$k_1(C, t_c) \cap Bc = \{C_1\}$$

Теме  $A$  налазимо као тачку централно симетричну тачки  $B$  у односу на  $C_1$ .

$$B - C_1 - A \wedge BC_1 = C_1A$$

**Друго решење:** (Само опис конструкције) У произвољној тачки  $D$  праве  $c$  конструишемо висину.

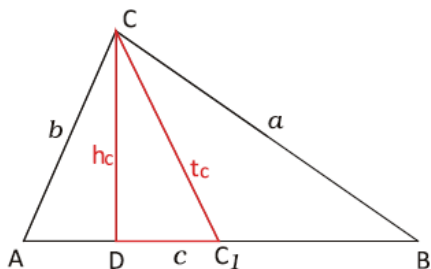
$$D \in c$$

$$D \in h \perp c$$

$$k_1(D, h_c) \cap h = \{C\}$$

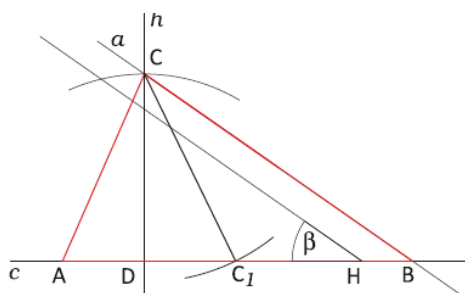
Уочавамо да постоји проблем конструкције угла  $\beta$  због немогућности одређивања тачке  $B$ . Зато угао конструишемо у произвољној тачки  $H$  праве  $c$ .

$$H \in c \wedge \angle Hf = \beta$$



Сада ћемо за налажење темена  $B$  искористити једнакост трансверзалних углова (искористити у доказу задатка). Наиме, теме  $B$  се налази на правој која је паралелна са краком угла са теменом у  $H$  и пролази кроз теме  $C$  троугла.

$$C \in a \parallel f \quad a \cap c = \{B\}$$



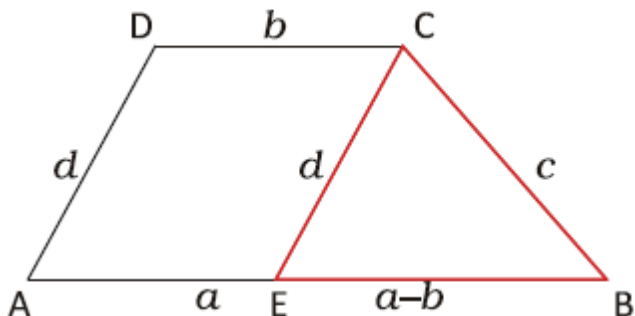
$$B - C_1 - A \wedge BC_1 = C_1A$$



## Конструкције четвороугла

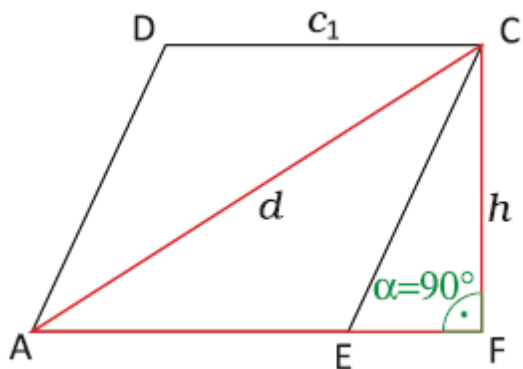
Пр 1. Конструисати траpez ако су му дате све четири странице.

**Анализа:** Конструисамо дуж кроз тачку  $C$  која је паралелна са краком  $AD$ . Троугао  $EBC$  се може конструисати пошто су му познате све три странице  $EB=a-b$ ;  $BC=c$ ;  $EC=d$  итд.



Пр2. Конструисати ромб ако је позната дужина једне његове дијагонале и полупречник уписаног круга.

**Анализа:** Пречник круга је једнак висини ромба. Нека је дата дужа дијагонале. Из темена  $C$  повучемо висину  $CF$  ромба. Троугао  $AFC$  се може конструисати (ССУ). Друга дијагонала је симетрала дијагонале  $AC$  итд.



## Задаци за вежбу

Вене : 485-503

Стојановић : 746-759